De eerste acht bladzijden van het Mechanica-script van Wassenberg

De notatie die Wassenberg gebruikt, komt overeen met de notatie uit het in 1960 voorgeschreven leerboek (op het gymnasium Reindersma en Van Lohuizen, Natuurkunde voor de tweede ronde (eerste druk 1939 !) en later Schweers en Van Vianen, Natuurkunde op corpusculaire grondslag). Deze notatie zocht op geen enkele manier aansluiting met de corresponderende notatie zoals die in de wiskundeboeken gebruikelijk is/was.

Het scriptonderdeel “kinematica van het massapunt” omvat 107 bladzijden; een betere benaming zou zijn “beschrijvende mechanica” . Alles wat er in dit onderdeel gebeurt is louter van wiskundige aard. In de wiskunde zou je dit onderdeel “ Eigenschappen van ruimtelijke krommen” noemen.

Voor de duidelijkheid zal ik enkele begrippen herhalen/vastleggen.
Uitgangspunt is de beweging van een massapunt langs een rechte lijn. De baan van het massapunt is een interval van de rechte lijn. Denk hierbij aan de vertikale worp. De baan is het interval $[0m, H]$, waarbij H = de hoogte boven het aardoppervlak die door het massapunt bereikt wordt. Deze baan wordt tweemaal beschreven: een keer als het massapunt omhooggaat, een keer als het massapunt omlaaggaat.

Het is duidelijk dat er voor de beschrijving van de beweging van het massapunt een assenstelsel (x-as) langs de rechte baan gekozen wordt. De tijdstippen die voor de beweging relevant zijn, liggen in een interval I, een deelverzameling van de reële getallen $\mathbf{R}$

Een plaatsfunctie x van een massapunt is een afbeelding van het tijdsinterval $I = [0\,s,\, t_{einde}] \subset \mathbf{R}$ naar de eendimensionale Euclidische ruimte $\mathbf{R}$.
Wiskundig wordt de tijd t de parameter van de plaatsfunctie genoemd.
Beschouw nu een massapunt met plaatsfunctie x. Die functie is dus gegeven. (plaatje 1)
De plaats van het massapunt op tijdstip $t \in I$ is $x(t)$. $x(t)$ is een baancoördinaat.
De baan van het massapunt := $\{ x(t) \in \mathbf{R} \mid t \in I \}$
De verplaatsing van het massapunt in het tijdsinterval $[t_1, t_2]$ is $\Delta x := x(t_2) - x(t_1)$.
(Wassenberg gebruikt op pag. 8, Definitie, het symbool Δs voor de verplaatsing zoals in het toenmalige lesboek; dit is verwarrend en moet vermeden worden. In opmerking c) noemt hij Δx (met de zojuist gegeven definitie) de verplaatsing in het platte vlak. Dat is de correcte manier om een verplaatsing te definiëren)

De door het massapunt afgelegde weg op het tijdstip $t \in I$ is het aantal meter $s(t)$ dat door het massapunt, gemeten langs de baan, wordt afgelegd als het massapunt van plaatscoördinaat $x(0)$ naar plaatscoördinaat $x(t)$ beweegt.
De afgelegde weg functie s is een afbeelding van het interval $I = [0\,s,\, t_{einde}] \subset \mathbf{R}$ op het interval $J := \{ s(t) \in \mathbf{R} \mid t \in I \} \subset \mathbf{R}$.
De afgelegde weg op het tijdstip t wordt genoteerd door $s(t)$; deze is in het algemeen geen plaatscoördinaat. (plaatje 1)
De door het massapunt afgelegde weg in het tijdsinterval $[t_1, t_2]$ is $\Delta s := s(t_2) - s(t_1)$.
(Wassenberg noemt Δs de verplaatsing langs de baan; pag. 8, opmerking b)
De definitie van de afgelegde weg is in dit geval zeer beeldend, maar intuïtief.

Als we ervan uitgaan dat het massapunt nooit geparkeerd wordt (een moment stilstaan mag wel), dan is de afgelegde weg functie *s* monotoon stijgend, d.w.z. als $t_1 < t_2$ met t_1 , $t_2 \in I$, dan geldt $s(t_1) < s\,(t_2)$ met $s(t_1), s(t_2) \in J$.

Dat betekent dat de functie *s* het tijdsinterval *I* <u>op</u> het afgelegde-weg-interval *J* afbeeldt en omkeerbaar is.
Omkeerbaar betekent: als $s(t_1) = s(t_2)$, dan $t_1 = t_2$, d.w.z. je kunt maar op één manier van J terug naar I.

Denk hierbij aan de klok in de auto en de kilometerteller ; de klok geeft de tijd *t* aan en de kilometerteller de bijbehorende afgelegde weg $s(t)$ op het ogenblik *t*.
I is de verzameling van alle klokstanden; *J* is de verzameling van alle kilometertellerstanden.
Deze informatie op zich is onvoldoende om de <u>plaats</u> van de auto te kennen
Je kunt op een tijdstip *t* waarop de snelheid 0 *m/s* is verder gaan of gewoon omkeren. Dat kun je aan de kilometerteller niet zien. De kilometertellerstand loopt gewoon op.

Wassenberg behandelt de afgelegde weg functie *s* steeds als een coördinaat langs de baan, op het niveau van een plaatsfunctie.

De functie *s* is positief (alleen $s(t=0\,s) = 0m$) en monotoon stijgend, dus $\frac{ds}{dt} \geq 0$.

Op pag. 105 definieert hij als voorbeeld van een afgelegde weg functie $s(t) = 5t^7 - 8t^3 + 5t^2 - t$
Deze functie is echter geen goed voorbeeld, want de functie kan negatief zijn en is niet monotoon stijgend.
De afgelegde weg functie heeft geen vectorkarakter, ook niet als het gaat om de kromlijnige beweging.
Wassenberg gebruikte het boek Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Band 1, editie 1954. In ieder geval kwam hij niet op het idee de tijd *t* en de afgelegde weg *s* als twee <u>gelijkwaardige</u> parameters voor een plaatsfunctie te zien. Grimsehl gaf daartoe geen aanleiding.
Naast Kronig heeft het boek van Grimsehl een geweldige invloed op zijn lesmateriaal gehad.

De parameter $s \in J$ kan dus net zo goed als de tijd $t \in I$ gebruikt worden om een plaatsfunctie te definiëren. (Dit gaat goed tot het ogenblik *t* dat het massapunt stilstaat. Dan moet je weten hoe de plaatsfunctie verloopt. Bij de vertikale worp is dat duidelijk).

De plaatsfunctie *X* met parameter *s* wordt gedefinieerd als volgt: $X\,(s(t)) := x(t)$
De baan $\{X(s) \in \mathbf{R} \mid s \in J\}$ is dus hetzelfde als de baan $\{x(t) \in \mathbf{R} \mid t \in I\}$. (plaatje 2)
Door de manier waarop in dit geval de afgelegde weg functie *s*(*t*) gebruikt wordt, wordt deze functie in de wiskunde een parametertransformatie genoemd.

<u>Opmerking c, pag. 8</u>: Wassenberg beweert dat bij een rechtlijnige beweging $\Delta x = \Delta s$

Deze opmerking is <u>niet</u> juist en leidt tot een <u>groot misverstand</u> over het begrip afgelegde weg.

We lichten deze bewering van Wassenberg toe voor de vertikale worp.

We maken, net zo als Wassenberg, gebruik van het intuïtieve begrip " afgelegde weg".

Voor de beweging omhoog ($0 \leq t \leq t_{top}$) geldt $s(t) = x(t)$.

Er geldt $\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0$

Het is duidelijk dat voor de omlaaggaande beweging de bewering van Wassenberg niet juist is.

Voor de neergaande beweging geldt $\Delta s = -\Delta x$; Er geldt wel steeds $\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0$

Voor de beweging omlaag ($t_{\max}/2 \leq t \leq t_{\max}$) geldt $s(t) + x(t) = 2H$ (H is de bereikte hoogte)
Differentiëren levert:

Voor de omhooggaande beweging geldt: $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$ met $\frac{dx}{dt} \geq 0$

Voor de omlaaggaande beweging geldt: $\frac{ds}{dt} = -\frac{dx}{dt}$ met $\frac{dx}{dt} \leq 0$

In het geval van de vertikale worp geldt voor de afgelegde weg functie *s* altijd : $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dx}{dt}\right|$

Dat hebben we nu met het intuïtieve begrip "afgelegde weg" <u>bewezen</u>.

We zullen in alle andere gevallen dit als definitie van de <u>afgelegde weg functie *s*</u> nemen.

Je <u>definieert</u> dus $\frac{ds}{dt} := \left|\frac{dx}{dt}\right|$

En deze abstracte definitie van de afgelegde weg hebben we nodig in het script op pag. 90 om de kromlijnige beweging te beschrijven.
Bij Grimsehl is het onduidelijk of bovenstaande formule een definitie of een stelling is.
Dit moet voor Wassenberg een geweldig dilemma geweest zijn.

In de wiskunde heet de baan van de plaatsfunctie $\vec{x}(t)$ een kromme.
De afgelegde weg langs de baan heet de (boog)lengte van de kromme.
In de wiskunde heeft een kromme per definitie een lengte als hij rectificeerbaar is.
Als de plaatsfunctie differentieerbaar is en de afgeleide $\frac{d\vec{x}}{dt}$ continu is, dan is de kromme

rectificeerbaar en geldt voor de afgelegde weg functie $s(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$.

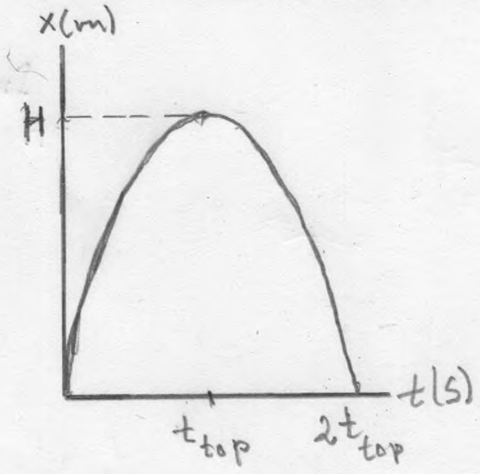
Als je niet op de hoogte bent van het begrip rectificeerbaar, dan definieer je intuïtief voor een plaatsfunctie $\vec{x}(t)$ die differentieerbaar is en waarvan de afgeleide continu is, gewoon

$$s(t) := \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

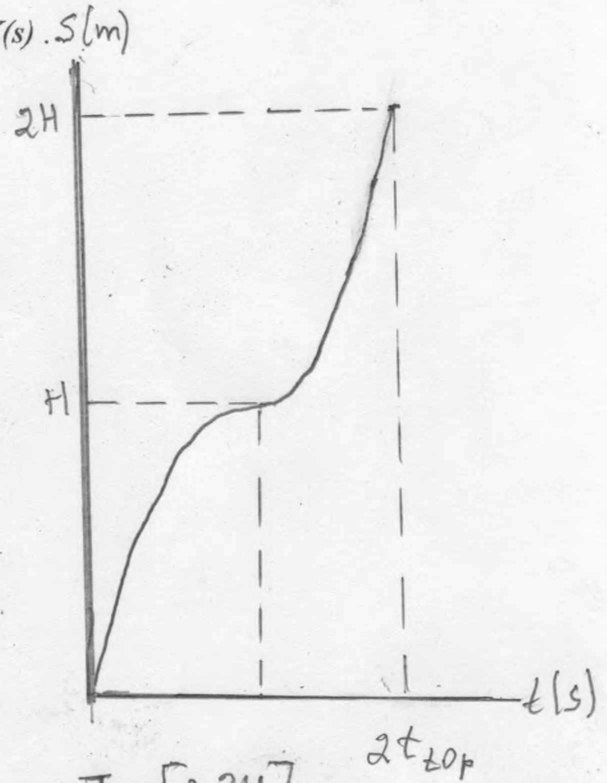
Intuïtief is *s* de afgelegde weg langs de baan (wiskundig : de lengte van de kromme).

In vectornotatie $\frac{ds}{dt} := \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

Figuur 1: plaatsfunctie *x(t)* en afgelegde-weg-functie *s(t)*
Figuur 2: plaatsfunctie *X(s)*
Figuur 3: wiskundige samenhang tussen *x(t)*, *s(t)* en *X(s)* .



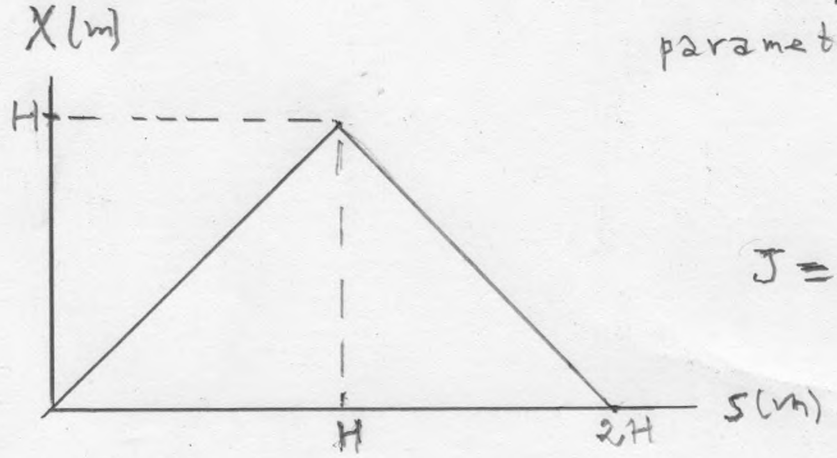
$I = [0, 2t_{top}]$



$J = [0, 2H]$

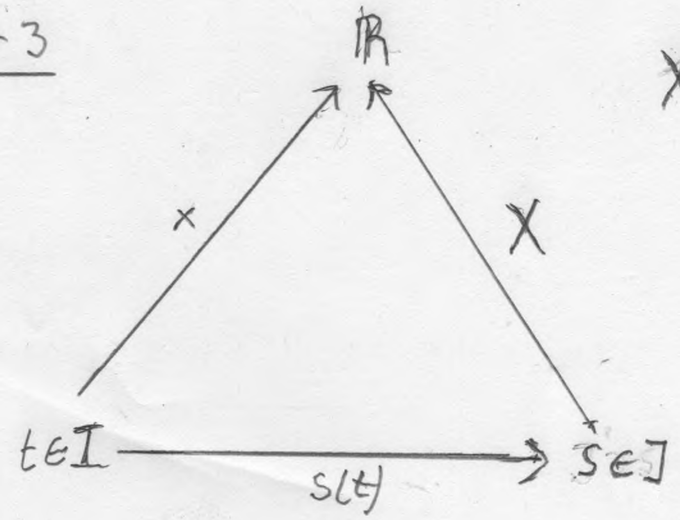
parametertransformatie s(t)

figuur 2



$J = [0, 2H]$

figuur 3



$X(s(t)) = x(t)$